4.2 Satz (+ BW)

ANA
14.5.18

(f ist unstetig $\Rightarrow$ f ist nicht diff.bar)

4.3 Satz (Rechenregeln für Ableitungen)

Seien $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diff.bar an der Stelle $A \in D$. Dann gilt

(i) $(c \cdot f)'(A) = c \cdot f'(A) \qquad \forall c \in \mathbb{R}$

$$(f \pm g)'(A) = f'(A) \pm g'(A)$$

(ii) $(f \cdot g)'(A) = f'(A)\, g(A) + f(A)\, g'(A)$

(iii) falls zusätzlich $g(A) \neq 0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(A) = \frac{f'(A)\, g(a) - f(A)\, g'(A)}{g^2(A)}$$

(iv) falls f zusätzlich streng monoton und $f'(A) \neq 0$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(A)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad y = f(A)$

(v) falls zusätzlich $g(D) \subseteq D$,

$$(f \circ g)'(A) = f'(g(A)) \cdot g'(A)$$

Beispiele

(i) Bestimmen Sie die Ableitung(sfunktion) von $f(x) = (x^2 + 2)^{10}$, $x \in \mathbb{R}$

ANA
14.5.18

$f_1(x) = x^2 + 2 \qquad f_2(x) = x^{10}$

$f = f_2 \circ f_1$

$$f'(x) = \underbrace{10\,(x^2+2)^9}_{f_2'(f_1(x))} \cdot \underbrace{2x}_{f_1'(x)}$$

(ii) Umkehrfunktion von e^x ist

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{e^{f^{-1}(y)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x},$$

$x \in (0, \infty)$

(iii) Umkehrfunktion von

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ ist

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\underbrace{\cos}_{\text{Abl. von } \sin(x)}(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} =$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

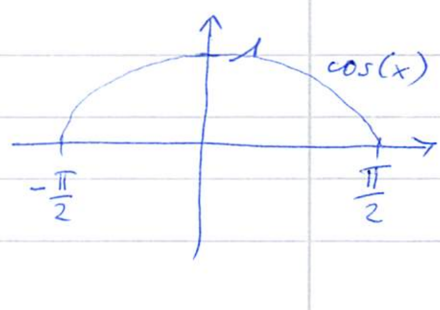
$\cos(x) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(x)}$

Für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gilt

$\cos(x) \geq 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - (\underbrace{\sin(\arcsin(x))}_{=x})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



(iv) $\left(\sin(x)\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' =$

$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)' =$

da die Reihe absolut konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ ist summandenweises Ableiten möglich

vgl. Satz 7.9 (Aih E)

$= (x)' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \ldots =$

$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x)$

z.z. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ ist absolut konvergent $\forall x \in \mathbb{R}$

Quot. Kriterium

$\sup \left\{ \left| \frac{a(k+1)}{a(k)} \right| = \left| \frac{(-1)^{k+1} x^{2(k+1)+1}}{\underbrace{(2(k+1)+1)!}_{2k+3}} \cdot \frac{(2k+1)!}{(-1)^k x^{2k+1}} \right| = \right.$

$= \frac{x^{2k+1} \cdot x^2 \cdot (2k+1)!}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (2k+1) \cdot (2k+2) \cdot (2k+3) \cdot x^{2k+1}} = \underbrace{\frac{x^2}{(2k+2) \cdot (2k+3)}}_{\text{monoton fallend mit wachsendem } k}$

$k \geq x^2$

$\Rightarrow$ die Reihe ist absolut konvergent

Analog: $\left(\cos(x)\right)' = \sin(x),\ x \in \mathbb{R}$

BRUNNEN

Beweis (Satz 4.3)

(i) folgt Satz 2.5

(ii) (Def. 4.1 $\iff \Big[\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in D$

$a_n \neq A : \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \Rightarrow$

$$f'(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(A) - f(a_n)}{A - a_n} \Big] \Big)$$

Produktregel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(A)g(A) - f(a_n)g(a_n)}{A - a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(A)\cdot g(A) - f(A)g(a_n) + f(A)g(a_n) - f(a_n)\cdot g(a_n)}{A - a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(A)\cdot (g(A) - g(a_n) + g(a_n)\cdot (f(A) - f(a_n))}{A - a_n} =$$

unabh. von n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(A)\cdot (g(A) - g(a_n))}{A - a_n} + \frac{g(a_n)\cdot (f(A) - f(a_n))}{A - a_n} =$$

$$f(A)\cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{g(A) - g(a_n)}{A - a_n}}_{\substack{= g'(A) \\ \text{da } g \text{ diff.bar ist}}} + \underbrace{\lim_{n\to\infty} g(a_n)}_{\substack{= g(A) \\ \text{da } g \text{ stetig} \\ \text{ist}}} \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{f(A) - f(a_n)}{A - a_n}}_{\substack{= f'(A), \text{ da} \\ f \text{ diff.bar ist}}}$$

(iii) Quotientenregel

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(A) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(A) \overset{\text{Produktregel}}{=} f'(A)\frac{1}{g(A)} + f(A)\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'(A)$$

z.z. $\left(\frac{1}{g}\right)'(A) = -\frac{g'(A)}{g^2(A)}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{g(A)} - \frac{1}{g(a_n)}}{A - a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{g(a_n) - g(A)}{g(A)\,g(a_n)}\right)}{A - a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{g(a_n) - g(A)}{A - a_n} \cdot \frac{1}{g(A)\,g(a_n)}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{g(a_n) - g(A)}{A - a_n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{g(A)\cdot g(a_n)}$$

$$= -\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{g(A) - g(a_n)}{A - a_n}}_{= g'(A), \text{ da } g \text{ diff.bar ist}} \cdot \frac{1}{g(A)\cdot \underbrace{g(A)}_{\substack{\text{wg. der Stetigkeit von } g \\ \lim_{n\to\infty} g(a_n) = g(A)}}}$$

$$= -\frac{g'(A)}{g^2(A)}$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(A) = \frac{f'(A)}{g(A)} - \frac{f(A)\cdot g'(A)}{g^2(A)} =$$

$$= \frac{f'(A)\,g(A) - f(A)\,g'(A)}{g^2(A)}$$

(iv) Da f streng monoton ist und stetig

ANA 14.5.18

$\overset{\text{Satz 3.6}}{\Longrightarrow}$ f^{-1} existiert und ist stetig an der Stelle A

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ a_n \in D\setminus\{A\}: \lim_{n\to\infty} a_n = A$$

$$(f^{-1})'(f(A)) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(f(a_n)) - f^{-1}(f(A))}{f(a_n) - f(A)}$$

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} = \underbrace{\{ f(x) : x \in D \}}_{\text{Bildbereich von } f}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to D$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - A}{f(a_n) - f(A)} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(A)}{a_n - A}}_{= f'(A),}} = \frac{1}{f'(A)}$$

denn f ist diff.bar und $f'(A) \neq 0$

$$\Longrightarrow (f^{-1})'(f(A)) = \frac{1}{f'(A)}$$

(v) $$(f\circ g)'(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{(f\circ g)(A) - (f\circ g)(a_n)}{A - a_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{f(g(A)) - f(g(a_n))}{A - a_n} \cdot \frac{g(A) - g(a_n)}{g(A) - g(a_n)} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{f(g(A)) - f(g(a_n))}{g(A) - g(a_n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{g(A) - g(a_n)}{A - a_n}$$

$\lim g(a_n) = g(A)$

$$= f'(g(A)) \cdot g'(A)$$

BRUNNEN

Bsp. Bestimmen Sie lokale und globale Extrema von

ANA
14.5.18

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{2}x^3 + 3x^2$

Untersuchen Sie f auf Monotonie und Konvexität

1) Mögliche Extrema $f'(x) = x^3 - 7x^2 + 6x$

$= x(x^2 - 7x + 6)$

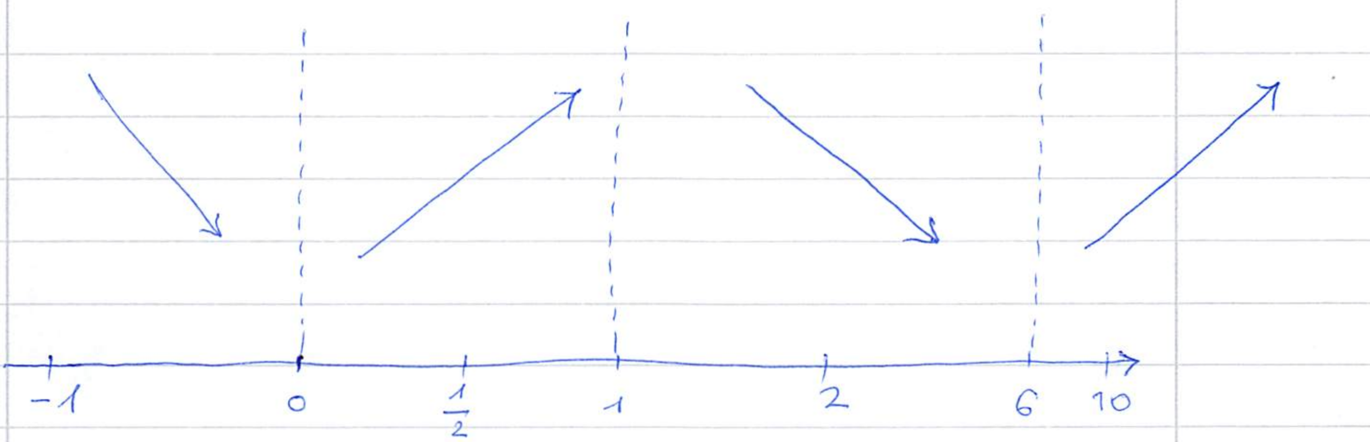
$= x \cdot (x-6) \cdot (x-1)$

$= 0 \iff x_1 = 0$

$x_2 = 6$

$x_3 = 1$

2) Monotonie (lokale Min, Max)



$f'(-1) < 0$
f ist streng monoton fallend

$f'(\frac{1}{2}) > 0$
f ist streng monoton wachsend

$f'(2) < 0$
f ist streng monoton fallend

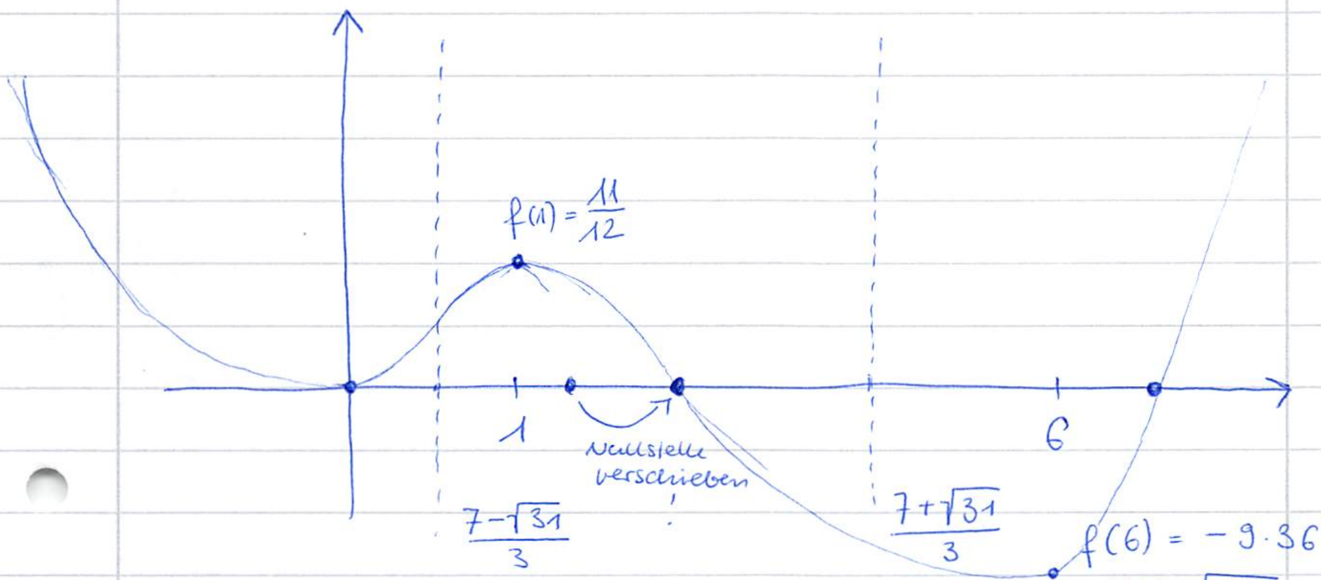
$f'(10) > 0$
f ist streng monoton wachsend

lokale Minima bei $x=0$ und $x=6$

lokales Maximum bei $x=1$

3) Konvexität und der Graph von f
(globales Maximum und globales Minimum)

ANA
14.5.18



$$f''(x) = 3x^2 - 14x + 6 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{31}}{3}$$

$$x_1 = \frac{7+\sqrt{31}}{3} \approx \overset{4{,}2}{\cancel{0{,}5}} \qquad x_2 = \frac{7-\sqrt{31}}{3} \approx 0{,}5$$

Nullstellen von f

$$f(x) = x^2 \cdot \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{3}x + 3\right) = 0$$

$$\iff x_{1,2} = 0, \quad x_{3,4} = \frac{14 \pm 2\cdot\sqrt{22}}{3}$$

$$x_3 = \frac{14+2\sqrt{22}}{3} \approx 7{,}8$$

$$x_4 = \frac{14-2\sqrt{22}}{3} \approx 1{,}5$$

Auf $\left(-\infty, \frac{7-\sqrt{3}}{3}\right)$ ist $f''(0) > 0$
f konvex

Auf $\left(\frac{7-\sqrt{3}}{3}, \frac{7+\sqrt{3}}{3}\right)$ $f''(1) < 0$
f konkav

Auf $\left(\frac{7+\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$ $f''(6) > 0$ f konvex

ANA
14.5.18

Globales min bei $x = 6$
Kein globales max, da f nach oben unbeschränkt ist

Bsp. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + 3x^2, \quad x \in [-1, 2]$

Extrema: lokales min bei $x = 0$

Vergleiche

$f(-1) = 5\frac{7}{12}$ globales Maximum
$f(1) = \frac{11}{12}$ lokales Maximum
$f(2) = -\frac{8}{3}$ globales Minimum

4.4 Satz (Globale max, min auf abgeschlossene Intervalle)

Sei $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$. Dann ist f auf $[a, b]$ beschränkt ($\exists C > 0 : \forall x \in [a, b] : |f(x)| \leq C$)

und

$\exists x_{min}, x_{max} \in [a, b] : \forall x \in [a, b] :$
$$\underbrace{f(x_{min})}_{\text{globales Minimum}} \leq f(x) \leq \underbrace{f(x_{max})}_{\text{globales Maximum}}$$

BW 1) z.z. f ist auf $[a, b]$ beschränkt

Annahme: f ist unbeschränkt, d.h.
$\forall C > 0 \; \exists x \in [a, b] : |f(x)| > C$

d.h. ANA 14.5.18

$C = 1 \quad \exists x_1 \in [a, b]: |f(x_1)| > 1$

$C = 2 \quad \exists x_2 \in [a, b]: |f(x_2)| > 2$

$\vdots$

$C = n \quad \exists x_n \in [a, b]: |f(x_n)| > n$

$\vdots$

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt denn
$a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bolzano-Weierstraß: jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge

<u>Idee</u>:
- in $[a, b]$ liegen alle (unendlich viele) Elemente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$
- in $[a, \frac{a+b}{2}]$ oder in $[\frac{a+b}{2}, b]$ liegen unendlich viele Elemente der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

  $\vdots$

- Nach weiterer Unterteilung erhält man ein Intervall I der Länge 2ε, $\varepsilon > 0$, welches unendlich viele Elemente (d.h. $\underbrace{\text{Teilfolge } (\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}}_{\text{konvergiert, denn } \tilde{x}_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon)}$) von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält

BRUNNEN